まえがき

自然界のさまざまな法則の中には, 変分原理で表現できるものが多い. 例として, 光学における Felmat の原理, 古典力学における最小作用の原理をあげることができる. 前者は 2 点間を通る光の経路がその 2 点を結ぶあらゆる経路の中で所要時間を最短にすることを主張し, 後者は運動する物体の相空間内での軌道が Lagrangian と呼ばれる量の積分をある意味で最小とする経路であることを主張している. このような変分原理は自然法則を記述する方法としてきわめて優れたものと考えられている.

一般にエネルギー量等の適当な関数のクラスの上で定義された実数値関数を汎関数といい, 汎関数の最小点* 等の臨界点 — すなわち微分が 0 となる点, 停留点ともいう — を求める問題を変分問題という. 上に述べた光学, 古典力学の問題に限らず私たちの身のまわりの多くの問題が変分問題として定式化される. さらに例をあげると, 曲面上の 2 点を結ぶ最短経路を求める測地線の存在問題, 周囲の長さを一定とするとき囲まれる面積を最大にする図形を求める等周問題, また多くの数理物理における問題が変分問題となる.

本書では微分方程式の解の存在問題に対する変分的アプローチについて入門的な解説を行う. すなわち微分方程式が変分構造をもつとき, いいかえれば微分方程式の解がある関数空間上定義された汎関数の臨界点として特徴づけられるとき, 汎関数の解析により臨界点の存在を保証し, 微分方程式の解を見いだす方法を解説する.

もっとも簡単な場合を述べると微分方程式に対応する汎関数 $I(u)$ が下に有界なとき, 下限 $\inf I(u)$ を達成する最小点 が存在するか, 否か? あるいは $I(u_j) \to \inf I(u)$ をみたす最小化列 $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ の極限として最小点が得られるか, 否か? を議論することとなる. 変分問題においてこのような方法は直接法と呼ばれる. 非常に自然な方法と思われるが, 直接法が正当化され解の存在問題等が議論できるようになったのは, 長い変分問題の歴史の中では比較的最近の出来事である.

変分問題の研究は微分積分学の誕生と共に始まり, 17–18 世紀において Bernoulli, Euler, Lagrange らにより解析力学の研究と共に大きな進歩をとげたが, 汎関数の最小値を達成する関数の存在等は 19 世紀に入りようやく厳密に論じ始められた. 今日 Dirichlet 問題と呼ばれている, 与えられた境界値の下で Laplace 方程式

$$\Delta u = 0$$

の解の存在を問う問題は, 電磁気学とも関連して多くの人の興味を引いた. この問題では領域が球等の特殊な場合は簡単に解を求めることができるが, 一般の領域の場合, 解が存在するか否かも明らかではなかった. 19 世紀半ばに Gauss, Thompson, Dirichlet は今日 Dirichlet

* minimizer を最小点と訳した. この訳語は確定していないようである. 関数という側面を強調する場合には最小化関数と呼ばれる場合もある.

の原理と呼ばれる解の特徴づけ, すなわちこの問題の解は同じ境界条件をもつ関数の内で積分 (Dirichlet 積分)

$$\int |\nabla u|^2\,dx$$

を最小にするものであることを見いだし, さらに最小値を達成する関数が存在すると主張した. この Dirichlet の原理は非常にわかりやすく魅力的な解の構成法であるが, その当時の最小点の存在に関する議論は厳密とは言い難いものであり批判を受けた. 特に Weierstrauss は下限を達成しない変分問題の例をあげ, 最小点の存在が自明でないことを指摘した.

Dirichlet の原理を正当化しようとする試みは多くの数学者により行われたが, 多くの困難を伴い, 厳密な正当化が Hilbert により 1900 年に行われるまでには約半世紀を要した. 今日では Hilbert の証明方法は改良され, より簡明な証明が与えられるようになっている. その証明の方法はまず解の概念を通常の古典解から広義解 (generalized solution) あるいは弱解 (weak solution) に拡張し, より広い関数のクラスで最小点を求め (広義解の存在), 次いで広義解の正則性を調べ, 実は解は古典解であることを示す (解の正則性) というものである. 最初から古典解に限定して最小点を求めることは非常に難しいことに注意されたい. また広義解のクラスの設定を適切に行うことがこの議論において非常に大切である.

Hilbert によって正当化された Dirichlet 原理はさらに多くの発展を見ることになる. その中から最小点以外の鞍点等を扱うことを可能とした Lysternik-Schnirelman 理論および Morse 理論が生まれ, 大域解析学と呼ばれる分野が開かれていった.

このような理論の入門として, 本書では汎関数の臨界点の存在問題を解説する. ここで求める臨界点は最小点, 極小点に限らず, 鞍点等も込めてその存在を最小化法, ミニマックス法を通じて議論する. 鞍点というと非常に特殊な臨界点と思われるかも知れないが, その存在は非常に重要である. 例えば閉曲面上の閉測地線を考える場合にはエネルギー汎関数の最小値は 0 となり, 最小点はすべて自明な定数曲線*となる. 一方, 球面上の大円等の興味ある閉測地線は汎関数の鞍点であり, 微分方程式においても興味ある解が鞍点となっていることが多い. また汎関数が 2 つの極小点をもつならば, 自然に鞍点の存在が期待されること (1 章), また最小値, 極小値の存在が期待できない変分問題も存在すること (例えば 3 章) にも注意したい.

ここで臨界点を得るための最小化法およびミニマックス法のアイデアを簡単に紹介する. 関数 $f(x)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が与えられたとき, $f(x)$ を微分し, 微分が 0 となる点 (臨界点) およびその符号変化を調べることにより, 我々は $f(x)$ のグラフを描くことができる. 最小化法, ミニマックス法により臨界点の存在を示す際にはこのプロセスを逆にたどる. すなわち関数のグラフの形状を調べ, その形状から微分が 0 となる点 (臨界点) が存在することを示すという方針をとる. 簡単な例をあげると $f(x)$ がある $a < b < c$ に対して $f(b) < \min\{f(a), f(c)\}$ をみたすならば, $f(x)$ は (a, c) 内に極小点, すなわち臨界点, をもたなければならない. この

* 曲面上のある点 p_0 に対して恒等的に $\gamma(t) = p_0$ となる曲線.

ように $f(x)$ の形状から臨界点の存在が導かれる場合がある．本書では関数空間 (無限次元 Banach 空間) 上定義された汎関数に対しても同様なアプローチを試みる．

以下汎関数を $I: E \to \mathbf{R}$ とかこう．上記のようなアプローチの中でまず考えられる方法は先にも述べたように, 汎関数が下に有界であるとき, 下限 $\inf_{u \in E} I(u)$ を達成する最小点の存在を考え, 最小点として臨界点を求める方法である．ついで汎関数 $I(u)$ の極小点, さらに鞍点の存在が問題となる．鞍点の存在を導く汎関数のグラフの形状というと難しそうであるが, 種々の条件の下で鞍点の存在が期待される．例として峠の定理 (Mountain Pass Theorem) と呼ばれる定理で要求される条件を紹介する．E を Banach 空間とし $I(u): E \to \mathbf{R}$ はある $r_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $e \in E$ に対して次をみたすとする．

(i) $I(0) \le 0$.

(ii) $\|e\| > r_0$ かつ $I(e) \le 0$.

(iii) $\|u\| = r_0$ をみたす任意の $u \in E$ に対して $I(u) \ge \delta_0$.

この状況を見やすくするために地形図を連想し, $I(u)$ が標高をあらわすものとみなす．すると 0 は高さが δ_0 以上の外輪山 (半径 r_0 の球面) に囲まれた盆地の中にあり, また外輪山の外の点 e でもまた高さが 0 以下と低くなる．このとき峠にあたる鞍点の存在が期待され, 対応する臨界値はミニマックス値により与えられる．(1 章 1.3 節).

しかしここで臨界点の存在問題において一般的には直感に反するようないろいろな状況がおこる可能性があることに注意したい．例えば, 汎関数 $I(u)$ が下に有界であっても下限は達成されるとは限らない, また上記の条件 (i)–(iii) がみたされても峠に当たる臨界点は存在するとは限らない．実際, 前者については $\mathbf{R}$ 上の関数 $I(x) = e^x$ が, また後者に関しては $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $I(x, y) = x^2 - (x-1)^3 y^2$ が反例を与える*. 無限次元 Banach 空間上の汎関数に関しては有界閉集合がコンパクトでないためにさらに複雑な現象が起こる場合があり, 注意を要する．

本書では Palais-Smale 条件と呼ばれる条件の下で病的な状況を避け, まず臨界点の存在を議論し, 非線形楕円型方程式, ハミルトン系に応用する．次に Palais-Smale 条件が成り立たない場合を見ることとする．先に Dirichlet 問題に関して述べたように, 問題にあわせて適切な関数空間を選ぶことが非常に重要であり, Palais-Smale 条件は関数空間の選定に非常に密接に関連してくる．

本書の構成をみよう．まず 0 章で 1 章以降で必要となる非線形関数解析の基礎的事項をまとめ準備とする．1 章では Banach 空間上の汎関数の臨界点の存在問題を最小化法, ミニマックス法を中心に解説する．汎関数の下限またはミニマックス値を b とするとき, すでに注意したように, b は必ずしも臨界点に対応するとは限らない．しかしながら近似解の列ともいうべき次をみたす点列 $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$ は必ず存在する．

$$I(u_j) \to b, \quad I'(u_j) \to 0$$

---

* 後者に関する反例は Brezis による．この例は Jeanjean 氏にお教え頂いた．

このことが議論のポイントとなる．この点列は Palais-Smale 列と呼ばれ, Palais-Smale 条件はその収束性を保証する条件である．1 章ではさらに汎関数 $I(u)$ のグラフの形状から臨界点の存在を読みとる種々のミニマックス法を紹介する．

2 章では 1 章で導入した最小化法, ミニマックス法を有界領域における次の非線形楕円型方程式に応用し, 解の存在問題を考察する．

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= g(x,u) \quad && \text{in } \Omega, \\
u &= 0 && \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

ここでは Palais-Smale 条件が成り立つ状況を扱い, 非線形項 $g(x,u)$ の性質が対応する汎関数にいかに反映されるか, そしてどのようなミニマックス法が適用できるか解説する．

3 章は非線形楕円型方程式と共に変分法の重要な応用例であるハミルトン系を扱い, 周期解の存在問題を考察する．1978 年の Rabinowitz の論文によりハミルトン系は変分的手法の適用できる場となり, 大域的解析が可能となった．そのランドマークともいえる仕事および関連する話題を紹介する．

4–5 章では Palais-Smale 条件が成り立たない場合を扱ういわゆる Concentration Compactness 法を紹介する．ここでは $\mathbf{R}^N$ での非線形楕円型方程式

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + u &= a(x)u^p \quad && \text{in } \mathbf{R}^N, \\
u &> 0 && \text{in } \mathbf{R}^N, \\
u &\in H^1(\mathbf{R}^N). &&
\end{aligned}
$$

の正値解の存在問題を $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ $(N \geq 3)$, $1 < p < \infty$ $(N = 1, 2)$ のときに考える．この場合 $H^1(\mathbf{R}^N)$ の $L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$ への埋め込みがコンパクトでないことに起因して, Palais-Smale 条件が成立しなくなる．しかしこの問題においては Palais-Smale 列の挙動が詳しく解析できることが助けと成り, 臨界点の存在が議論できる．4–5 章ではその方法を紹介する．特に解の存在, 非存在が $a(x)$ に非常にデリケートに依存し, 有界領域の場合と状況は全く異なること, Bahri-Li のミニマックス法による $a(x) \to 1$ $(|x| \to \infty)$ の下での解の存在証明, そして Séré に始まる空間周期的な $a(x)$ に対する multi-bump 解の変分的構成の一端をみる．

6 章においては 3 章と同様にハミルトン系に対する周期解の存在問題を議論する．ここでは天体力学での 2 体問題に関連した状況でのラグランジュ系を扱う．コンパクトリーマン多様体上の閉測地線の存在を示した Lyusternik-Fet の議論と類似の議論により, まずポテンシャルが 0 において強い特異性をもつとき周期解の存在が示される．特異性が弱い場合は Palais-Smale 条件のなりたたない問題となるが, Morse 指数を利用することにより部分的に解決できることを紹介する．

現在, 微分方程式を対象とした変分問題に関する書籍は日本語で出版されたものはあまり見受けられないが, 英文のものでは Ambrosetti [**9**], Chang [**50**], Ekeland [**73**], Flucher

[**80**], Ghoussoub [**83**], Rabinowitz [**159**], Struwe [**179**], Mawhin-Willem [**138**] 等数多く出版されており, それぞれ特色ある良書となっている．そこで本書はなるべく変分問題への入門の助けとなるよう, self-contained になるように心がけ, 変分法の基本的なアイデアを解説した．必要とする知識は関数解析, Sobolev 空間の基礎的事項のみであり, Leray-Schauder の写像度の理論等も必要としない．そのため本書で扱っている題材は比較的限られたものとなった．本書では触れられなかった話題については上記の文献等により補って頂きたい．本書が変分問題への入門の一助となれば著者にとって望外の幸せである．

最後に, 本書の執筆の機会を与えて頂き, また原稿に目を通し有益な助言を頂いた俣野博先生, 付録に目を通し有益な助言を頂いた四ツ谷晶二先生, 原稿を丁寧に目を通して下さった足達慎二氏, そして大変お世話となった岩波書店編集部の方々に感謝したい．本書を恩師, 故洲之内治男先生に捧げる．